محمد واصل الظاهر *

رياضيات العصر

١ ـ تمهيد

الرياضيات من أقدم فروع المعرفة ، وهي ،والفلك ، اقدم العلوم . ولقد تبوأت الرياضيات منذ القدم ، مكانا عاليا فى حياة الانسان ، ولعبت دوراً اساسياً فى مختلف شئونه ، لذلك كانت عنايته بها كبيرة .

ويعتبر كتاب « أصول الهندسة » لاقليدس من أعظم الكتب الرياضية تأثيراً فى تفكير الانسان ، كما أنه اكبرها اثراً فى تطور الرياضيات منذ حوالي ألفي سنة حتى مطلع هذا القرن . ومن العسير على المرء أن يعد كتباً كثيرة لها مثل هذا التأثير . فلو اعتبرنا « الأصول » مثالاً من كتب العصور القديمة ، لأمكن اعتبار كتاب « الجبر والمقابلة » للخوارزمي مثالاً من كتب العصور الوسطى ، لأن منه نشأ اسم الجبر وانتشر موضوع الجبر الهندسي . أما فى العصور الحديثة بعد ظهور الحضارة الغربية ، فقد نشرت كتب عديدة اثرت فى الرياضيات ، وتركت فى هيكلها انطباعات واضحة . فكتاب « الأسس » لنيوتن : الذى وضع فيه أول تصوير دقيق للظواهر الطبيعية ، وكتاب « البحوث » لكاوس ، الذى رسم فيه خطوطاً واضحة لمختلف فروع الرياضيات ، وكتاب « الأسس الرياضية » لوايتهيد ورسل (٧ ، ص ١٦١) ✱ الذى عرضت فيه أول محاولة جريئة لاستخلاص الرياضيات من مبادىء منطقية محددة فتصبح بذلك منطقاً تطبيقياً ، هذه الكتب وغيرها تعتبر أمثلة من كتب العصور الحديثة .

---

* الدكتور محمد واصل الظاهر رئيس قسم الرياضيات بجامعة الكويت كان رئيسا لقسم الرياضيات بجامعة بغداد كما كان عميدا لكلية العلوم له بحوث مبتكرة منشورة فى فروع عديدة من الرياضيات المعاصرة كما له مؤلفات فى جوانبها العامة والتاريخية .

✱ تشير الارقام الموضوعة بين المعقوفتين الى المراجع فى آخر البحث .

وفى النصف الاخير من هذا القرن ، ومنذ عام ١٩٣٥ ، بدات مجموعة من الرياضيين ، تحمل اسم بورباكي Bourbaki (٧ ، ص ١١٨) محاولة رائدة لعرض الرياضيات العصرية كبناء منطقي موحد مستند على مصادرات (اوموضوعات أو مسلمات) محددة وواضحة . ونشرت هذه المدرسة الفكرية سلسلة من الكتب ،تعتبر من أروع كتب هذا العصر فى الرياضيات (من بينها ٣) . ولسوف تؤثر هذه السلسلةمن الكتب فى الرياضيات ، وفى مسيرتها لسنوات عديدة قادمة ، كما ستؤثر فى الحضارة البشريةبرمتها ، لأن طبيعة الرياضيات حضارية فى الأصل (١٠ ، ص ٢٨١) .

عاش اقليدس حوالي ٣٠٠ ق.م (٦ ، ج١)فى مدينة الاسكندرية ، وعمل استاذا بجامعتها . ولم يصل الينا من مؤلفاته سوى كتاب « أصول الهندسة » الذى استعمل لأكثر من الفى سنة ، وفى مختلف اقطار العالم . وقد ترجم الى عدة لغات ، لكن الترجمة العربية تعتبر اهمها جميعا ، كما تعتبر ترجمة نصير الدين الطوسي أوسعهاانتشارا . وترجمه الى اللغة الانجليزية ، عن لغته الاغريقية ، هيث فى سنة ١٩٢١ (٦) واجرى فى ترجمته مقارنات مسهبة مع الترجمات العربية التي تناولته بكثير من العناية (١) .

استند اقليدس فى أصوله على مجموعة من التعاريف والفرضيات . واحتوت تعاريفه على أفكار متعلقة بالخط والمستوى والزاوية وغيرهامن الأشكال. أما فرضياته ، والتي عددها عشرة، فقد سردها فى مجموعتين جزئيتين ، كل منهماتتالفمن خمس عبارات . سمى المجموعة الجزئية الأولى بالمفاهيم العامة Common Notions كما سمى الثانية بالمصادرات (او الموضوعات او المسلمات) postulates وتنص المفاهيم العامة (٦ ص ٢٢) على ما ياتي :

(١) الأشياء المساوية لشيء واحد متساويةفيما بينها .

(٢) اذا أضيفت كميات متساوية الى أخرى متساوية ، تكون النتائج متساوية .

(٣) اذا طرحت كميات متساوية من أخرى متساوية ، تكون البواقي متساوية .

(٤) الأشياء المتطابقة متساوية .

(٥) الكل اكبر من جزئه .

وأما المصادرات فتنص على ما ياتي :

(١) من الممكن الوصل بين أى نقطتين بخط مستقيم .

(٢) يجوز مدّ قطعة المستقيم من جهتيها الى غير حدّ .

(٣) يمكن رسم الدائرة اذا علم مركزها ونصف قطرها .

(٤) الزوايا القوائم متساوية .

(٥) اذا قطع مستقيمان بثالث ، بحيث كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع اقل من قائمتين ، فان المستقيمين يتلاقيان فى تلك الجهة من القاطع اذا مُدّا الى غير حدّ .

ولا يعرف بالضبط لماذا اراد اقليدس أن يقيدنفسه بالمفاهيم والمصادرات التسع الأولى الى اقصى حد ممكن . فقد اشتق ثمانيا وعشرين نظرية دون استعمال المصادرة العاشرة التي

عرفت ، فيما بعد ، **بمصادرة التوازى** . وقد توفق فى عمله الى اشتقاق نظريات مهمة مثل (١١ ، ص ٨) : مجموع اى زاويتين فى مثلث أقل من قائمتين . ولم يستعمل اقليدس فرضيته العاشرة الا فى برهان نظرية ٢٩ والتي تقول بأنه :اذا قطع مستقيمان متوازيان بقاطع فان الزاويتين الداخليتين المتبادلتين متساويتان ، والزاويتين الخارجيتين الداخليتين متساويتان ، وكذلك مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوى قائمتين .

ان الطريق الذى سلكه اقليدس فى كتابه اصبح ، فيما بعد ، اسلوباً رائعاً فى البحث الرياضي ، وان الموقف الذى اتخذه اقليدس نحو مصادرة من مصادراته عاد ، بعده ، أسلوبا يحتذى به فى الدراسات الرياضية وغيرها . انه من المهم أن يعرف المرء الى اى حد يمكنه أن يسير بقيود معينة ، وما هو تأثير كل قيد من القيود ...

وعقب اقليدس ، رحب الرياضيون بفرضياته الا فرضيته العاشرة . فمع ان الرياضيين لم يتمكنوا من نكران صحتها ، الا انهم اعتقدوا ان مكانها الصحيح بين النظريات لا بين الفرضيات . لذلك اراد عدد غير قليل من الباحثين أن يستنتج هذه العبارة من العبارات التسع الأخريات .. ولقد اتخذوا لذلك سبلا متنوعة ، منها مباشرة ومنها غير مباشرة . فمنهم من حاول أن يبرهن نظرية ٢٩ دون استعمال الفرضية العاشرة ، كما أن منهم من اراد اشتقاق احدى العبارات المكافئة لها منطقياً ، من بقية الفرضيات . وعلى وجه العموم ، يمكن تحديد المحاولات التي قام بها الهندسيون فى هذا المجال بثلاث :

١ ــ حاول البعض استخلاص الفرضية العاشرة باستخدام الفرضيات التسع الأولى ، آملين بذلك نقلها الى حظيرة النظريات (او القضايا) .

٢ ــ واراد آخرون أن يستغنى عن الفرضية العاشرة عن طريق اثبات نظرية ٢٩ بدونها .

٣ ــ وسلك قسم ثالث طريقاً غير مباشر ، بمحاولة الافادة من نقيض الفرضية فى اثبات الفرضية ذاتها ، وهو الطريق الموسوم **بخلاف الفرض** . لذلك اضاف هؤلاء نقيض الفرضية العاشرة الى الفرضيات التسع ، وبدأوا باشتقاق نظريات جديدة على امل الوقوع فى تضارب منطقي ، ولكن شيئًا من ذلك لم يحدث !

ولقد استمرت هذه المعارك المريرة مدة تزيد عن الفي سنة ، خرجت بعدها فرضية التوازى اكثر نضوجاً واغنى فكرة . وكان من نتائج هذه الدراسات الشاقة ولادة عصر جديد فى الرياضيات . فنشأ من جراء ذلك **موضوع أسس الرياضيات** علماً قائماً بذاته ، وتفرعت عنه مواضيع عديدة من أهمها : المنطق الرياضي ، وفلسفة الرياضيات ، وما وراء الرياضيات . هذا بالاضافة الى الهندسات اللا اقليدية التي اصبحت علوما لا تقل اهمية عن الهندسة الاقليدية من الناحية النظرية او التطبيقية .

ان دراسة طبيعة الرياضيات المعاصرة ومعرفة الأسس التي تقوم عليها ، واللغة التي تستخدمها والوسائل التي تتبعها ، أمر مهم ، سواء بالنسبة لمن يشتغل فى الرياضيات أو من يستعين بها فى الاشتغال بالعلوم الأخرى . ان الرياضيات تستخدم نظرية المجموعات لغة فى التعبير ، وطريق المصادرات axiomatic method أسلوباً فى البحث والدراسة فى أغلب الأحيان . لذلك سوف نتناول هذين الموضوعين ، فيما يأتي ، بشيء من التفصيل والعناية ، ولكن دون استعمال طريقة المصادرات (٥) للمجموعات .

٢ ــ نظرية المجموعات Theory of Sets

يواجه المرء فى حياته اليومية أصنافاً متنوعةمن الأشياء . فالمدرس يتعامل مع صنف من الطلبة ، ويجالس الشخص صنفاً من الناس ،ويمتلك المزارع صنفاً من الأشجار ، وهكذا .. ويعنى كل صنف من هذه الأصناف شيئاً قائمابذاته . وبالامكان تعيين العناصر التي يتألف منها كل صنف من الأصناف ، أو ، بعبارة أخرى ،من الممكن معرفة فيما اذا كان شيء ما ينتمي الى صنف معين أم لا . فالصفة المميزة لعناصر الصنفهي الانتماء ، بينما الصفة التي تمتاز بها العناصر التي ليست فى الصنف المعين هي اللا انتماء .

وأصناف الأشياء مهمة فى الرياضيات . فلدينا صنف الأعداد الطبيعية ط وصنف الأعداد الصحيحة ص وصنفالأعداد الحقيقية ح وصنفالأعداد النسبية ن وغيرها . ويطلق على صنف الأشياء ، فى الرياضيات ، لفظة **مجموعة** (أوطقم) . ولئن كانت الرياضيات لغة العلم فان نظرية المجموعات لغة الرياضيات . ومن الصعب،فى كثير من الأحيان ، ذكر جميع عناصر المجموعة ، ولذلك يكتفي بالاشارة الى الصفة التي تشتركبها عناصر المجموعة ، بحيث ان كل ما يتصف بتلك الصفة ، **ينتمي** الى المجموعة وهو عضو أو عنصرفيها . واذا كان أ عنصراً من عناصر المجموعة م فنقول ان أ ينتمي الى م ونكتب بالرموز أ $\in$ م . فللتعبير عن أن ا هو عدد طبيعي ، نكتب ا $\in$ ط . وتوصف المجموعات بوضع عناصرها بين قوسين مزدوجين ، أو بذكر الصفات التي تتصف بها عناصر المجموعة .

فمجموعة الأعداد الصحيحة السالبة التي تزيدعن ــ ٥ يعبر عنها بالصيغة « ــ ١ ــ ٢ ، ــ ٣ ، ٤ » او الصيغة « أ : أ عدد صحيحسالب > ــ ٥ » .

ومن المفيد أن نتصور عناصر المجموعاتموجودة فى مستطيل او مربع ، وان العناصر المعنية منها موجودة فى دوائر او منحنيات مغلقةبسيطة . ويسمى هذا التمثيل بشكل فين حيث يمثل المستطيل أو المربع مجموعة اساسية مثبتةتسمىالمجموعة الشاملة ش ، كما تسمى المجموعة التى لا تحتوى على اية عناصر بالمجموعة الخاليةويرمز لها بالرمز ϕ . ففي الهندسة المستوية، مثلاً ، جميع المستقيمات تمثل مجموعة فىالمستوى الذى يعتبر ، فى هذه الحال ، المجموعة الشاملة . ويقال عن مجموعتين انهما متساويتاناذا كانت عناصر الأولى تنتمي الى الثانية وعناصر الثانية تنتمي الى الأولى ، ونعبر عن ذلك بكتابةس = ص . اما اذا كان كل عنصر فى المجموعة س هو ، فى نفس الوقت ، عنصر فى المجموعة ص ،فيقال ان س **مجموعة جزئية** من ص ، ونعبر عن ذلك بالرموز س $\subseteq$ ص . واذا لم تكن سمجموعةجزئية من ص فنكتب س $\nsubseteq$ ص . لذلك نستنتج بأن :

س = ص اذا كان (س $\subseteq$ ص) و (ص $\subseteq$ س) ، والعكس صحيح ايضا .

ولو اعطيت مجموعة س ، فجميع العناصر التيلا تنتمي الى س تؤلفما يسمى بالمجموعةالمتممة،

ويرمز لها بالمرمز سَ . وان **الحاصل الكارتيزى** لمجموعتين س ، ص هو س × ص = «أ ، ب » ، حيث أ ∋ س و ب ∋ ص .

ويجدر ، قبل الدخول فى دراسة مفصلة لنظرية المجموعات ، ان نلاحظ بأن هناك مشاكل رافقت نشوء هذه الأفكار وتطورها . ولكنه امكن السيطرة على هذه المشاكل والتخلص منها ، وبذلك اصبحت نظرية المجموعات من اوسع الأفكار الرياضية استعمالاً واكثرها تغلغلا فى مختلف فروع الرياضيات (٣) .

ان عناصر مجموعة س ، على العموم ، قد تكون نفسها مجموعات بذاتها ، كما أن من المحتمل أن تكون المجموعة س عنصراً من عناصر ذاتها . مثال ذلك : مجموعة الأفكار المجردة كافة ، هي ولا شك ، فكرة مجردة . لذلك فهذه المجموعة عضو ينتمى الى ذاتها . وتسمى المجموعة اعتيادية اذا لم تكن عنصراً من عناصر ذاتها . وفى غير ذلك تسمى مجموعة غير اعتيادية .

وتشير النظريتان المذكورتان فيما يأتي الى نوع من التناقض الذى ظهر فى بداية تطور نظرية المجموعات (٥ ، ص ٢) ، ويدعى بمتناقضة رسل .

لنفرض أن ش يمثل مجموعة جميع المجموعات الاعتيادية . لدينا قضيتان : ـــ

قضية أ

المجموعة ش اعتيادية .

البرهان : اذا كانت ش غير اعتيادية فانها عضو فى نفسها . ولكن جميع أعضاء ش هي مجموعات اعتيادية ، وهو مناقض للفرض ، لذلك فان ش اعتيادية .

قضية ب

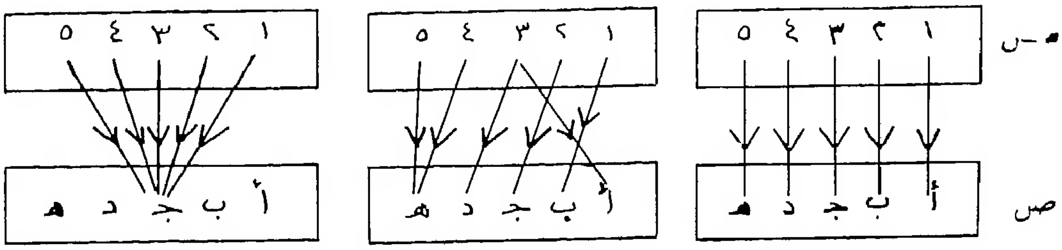
المجموعة ش غير اعتيادية

البرهان : لو جاز أن تكون ش اعتيادية ، فهي ، والحالة هذه ، ليست عضواً فى ش . وهذا تناقض لان ش تحتوى على جميع المجموعات الاعتيادية . ومن التناقض ينتج أن ش غير اعتيادية .

ويظهر مما ذكر أعلاه انه لا يصح اعتبار المجموعة ش ، التي تسمى أحياناً بمجموعة رسل ، من المجموعات التي يمكن التعامل معها . ونشير ، عرضا ، بأنه كان لهذه المتناقضة وامثالها دور فعال فى دراسة اسس الرياضيات وفى ظهور المنطق الرياضي حقلاً من اهم حقول الرياضيات المعاصرة .

لنفرض أن س ، ص مجموعتان مفروضتان . اذا اقترنت عناصر المجموعة س مع عناصر المجموعة ص بحيث يقترن كل عنصر فى س بعنصر واحد فقط فى ص فيقال ان بين المجموعتين **تطابقا** mapping . وتسمى المجموعة س **مجال** التطابق كما تسمى المجموعة ص **مجاله المقابل** . ونعبر عن ذلك بالرموز ت : س ⟵ ص حيث ت يرمز للتطابق . اذا كان أ ∋ س فان العنصر

الوحيد فى ص الذى يقترن مع ا يدعى صورة ا تحت تأثير التطبيق ت ، ويرمز له بالصيغة ت (ا) . وتدعى المجموعة الجزئية التي تضم جميع صور عناصر س بمدى التطبيق . ويسمى التطبيق **شاملا** اذا كان مداه يساوى مجاله المقابل ، كما يسمى **متباينا** اذا لم يوجد عنصران مختلفان فى المجال يقترنان مع نفس العنصر من المجال المقابل . واخيرا ، يسمى التطبيق **تقابلا** اذا كان شاملا ومتباينا . ان البيانات الآتية توضح أنواع التطبيق .



تقابل — ليس تطبيقا — تطبيق غير شامل وغير متباين

واذا فرضت مجموعتان س ، ص فالمجموعة ع المؤلفة من العناصر التى تنتمي الى احدى المجموعتين، على الأقل ، تسمى **اتحاد** س مع ص. وبالرموز نكتب :

ع = س $\cup$ ص = « ا : ا $\in$ س أو ا $\in$ ص » .

والمجموعة ل المؤلفة من العناصر التى تنتمي الى كلتا المجموعتين تسمع **تقاطع** س مع ص . ونعبر عنها بالرموز :

ل = س $\cap$ ص = « ا : ا $\in$ س و ا $\in$ ص » .

مثال ذلك اذا كانت س = « ١ ، ٣ ، ٦ ، ٢ » ص = « ٢ ، ٤ ، ٣ ، ٥ ، ٨ » فان :

س $\cup$ ص = « ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ » ،

س $\cap$ ص = « ٢ ، ٣ » .

أما اذا كانت ص = « ٤ ، ٥ ، ١٠ » فان :

س $\cup$ ص = « ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ١٠ »

س $\cap$ ص = Φ = «   » ، ويقال عن س ، ص ، فى هذه الحالة انهما **منفصلتان** .

ومن التعاريف آنفة الذكر بالامكان استنتاج النتائج الآتية بسهولة (٩ ص ٣) : ـ

(أ) اذا كانت س ، ص مجموعتين فان :

(١) س ∪ ص = ص ∪ س (خاصية الابدال فى الاتحاد)

(٢) س ∩ ص = ص ∩ س (خاصية الابدال فى التقاطع)

(٣) (س ∪ ص)′ = س′ ∩ ص′ (ويدعيان قانوني ديموركن فى التتميم)

(٤) (س ∩ ص)′ = س′ ∪ ص′ (أو ثنائية الاتحاد والتقاطع)

(أأ) اذا كانت س ، ص ، ع ثلاث مجموعات فان :

(١) س ∩ (ص ∩ ع) = (س ∩ ص) ∩ ع (خاصية التجميع فى التقاطع)

(٢) س ∪ (ص ∪ ع) = (س ∪ ص) ∪ ع (خاصية التجميع فى الاتحاد)

(٣) س ∩ (ص ∪ ع) = (س ∩ ص) ∪ (س ∩ ع) (توزيع التقاطع بالنسبة للاتحاد)

(٤) س ∪ (ص ∩ ع) = (س ∪ ص) ∩ (س ∪ ع) (توزيع الاتحاد بالنسبة للتقاطع)

وكتطبيق على الخواص السابقة للتقاطع والاتحاد نأتي بالمثالين التاليين : ـ
لدينا :

س ∩ (س ∪ ص) = (س ∪ φ) ∩ (س ∪ ص)

= س ∪ (φ ∩ ص)

= س ∪ φ

= س

وكذلـــك :

س ∪ (س ∩ ص)= (س ∩ ش) ∪ (س ∩ ص) ، حيث ش المجموعة الشاملة

=س ∩ (ش ∪ ص)

= س ∩ ش

= س

وبذلك نستنتج ان :

س ∩ (س ∪ ص) = س ∪ (س ∩ ص)

٣ ـ المجموعات المنتهية وغير المنتهية Finite and infinite sets

تكلمنا فيما سبق عن انواع مختلفة من المجموعات مثل مجموعة الأعداد الطبيعية التي لا تزيد عن ١٠ مثلا ومجموعة الاعداد الطبيعية باكملها . ولفرض التمييز بين النوعين نقول عن المجموعة س ≠ Φ **منتهية** اذا وجد عدد طبيعي ن بحيث يمكن وضع تقابل ما بين عناصر س وعناصر المجموعة « ١ ، ٢ ، ...... ، ن » . واذا لم تكن المجموعة منتهية، سميت **غير منتهية .**

ومن ذلك يتضح ان اتحاد مجموعتين منتهيتين هو مجموعة منتهية ، كما ان اتحاد مجموعة منتهية مع مجموعة غير منتهية هو مجموعة غير منتهية ، وكذلك فان اتحاد مجموعتين غير منتهيتين هو مجموعة غير منتهية .

وسوف نقول عن مجموعة س انها قابلة للعدد Countable اذا أمكن ايجاد تقابل ما بين عناصرها وعناصر مجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة . واذا لم تكن المجموعة قابلة للعد ،سميت غير قابلة للعد uncountable . فمجموعة الأعداد الفردية قابلة للعد لأن التطبيق الآتي :

ت : ن ⟵ ٢ ن ـ ١ ، ن = ١ ، ٢ ، ٣، ....

هو تقابل بين الأعداد الطبيعية الموجبة والاعداد الطبيعية الفردية .

وكذلك فان مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية قابلة للعد لأن التطبيق الآتي :

ق : ن ⟵ ٢ ن ، ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ....

هو تقابل بين مجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة ومجموعة الأعداد الزوجية الموجبة . وعند اضافة العدد الزوجي صفر الى مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة تبقى النتيجة قابلة للعد ، لأن اتحاد مجموعة منتهية مع مجموعة قابلة للعد هو مجموعة قابلة للعد .

وعلى سبيل المثال ، سوف نذكر بعض النظريات المتعلقة بالمجموعات القابلة للعد ، والمجموعات غير القابلة للعد ، والمجموعات غير المنتهية (٢ ، ص ٣٣٦) .

نظرية ١

اذا كانت المجموعة قابلة للعد فبالامكان وضعها فى تقابل مع مجموعة جزلية حقيقية منها .

البرهـــان :

لتكن س مجموعة قابلة للعد ، اى يمكن كتابة عناصرها بشكل تتابع كما يأتي :

س = « $س_1$ ، $س_2$ ، .... ، $س_ن$ ، ... » .

ان التطبيق الآتي :

$س_1$ ← $س_2$ ، $س_2$ ← $س_3$ ، $س_3$ ← $س_4$ ، ...... ، $س_ن$ ← $س_{ن+1}$ ، .....

هو تقابل بين المجموعة س والمجموعه س – « $س_1$ » . وبما ان :

(س – «$س_1$») ⊂ س ، يتم المطلوب .

نظرية ٢

كل مجموعة غير منتهية تحتوى على مجموعة جزئية قابلة للعد .

البرهـــان :

لنفرض أن س مجموعة غير منتهية ولنبشرع بذكر عناصرها واحدا بعد آخر كما يأتي :

$س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ..... ، س ن ، $س_{ن+1}$ ، ....

فلو اضطررنا الى الوقوف فى هذه العملية لكان ذلك يعني أن س مجموعة منتهية . وبما أن س غير منتهية بالفرض فبامكاننا الاستمرار فى التعداد الى غير نهاية ، وبذلك نحصل على مجموعة جزئية قابلة للعد ، وهو المطلوب .

نظرية ٣

تكون المجموعة غير منتهية اذا امكن وضعها فى تقابل مع مجموعة جزئية حقيقية منها ، والعكس صحيح أيضا .

البرهان :

(ا) لو كانت المجموعة المعطاة ، س مثلا ، منتهية لأمكن وضعها فى تقابل مع مجموعة تحتوى على ن من العناصر ؛ وبالتالي فلا يمكن وضعها فى تقابل مع مجموعة جزئية حقيقية فيها . وهذا يثبت المعكوس .

٢ ــ لنفترض أن س مجموعة غير منتهية . فبموجب نظرية ٢ ، تحتوى س على مجموعة جزئية قابلة للعد مثل م = « $س_١$ ، $س_٢$ ، ..... » . ان التطبيق الآتي :

$$س_ن \longleftarrow س_{ن+١} \text{ اذا كان } س_ن \in س_١$$

$$س_ن \longleftarrow س_ن \text{ اذا كان } س_ن \in س \text{ و } س_ن \notin س_١$$

هو ، ولا شك ، تقابل ما بين س ومجموعة جزئية حقيقية فيها هي س ــ « $س_١$ » .

ومن الامثلة المألوفة على المجموعات القابلةللعد ، مجموعة الاعداد الصحيحة ومجموعة الأعداد النسبية . اما مجموعة الأعداد الحقيقية فهي غير قابلة للعد . وسوف نثبت هذه النتائج فيما يأتي :

نظرية ٤

مجموعة الأعداد الصحيحة قابلة للعد .

البرهان :

ان التطبيق الآتي :

ن ⟵ ٢ن+ ١ ، اذا كانت ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، .... ؛

ــن ⟵ ٢ن ، اذا كانت ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ؛

هو ، فى الواقع ، تقابل بين مجموعة الأعداد الصحيحة ومجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة ، الأمر الذى يثبت أن مجموعة الأعداد الصحيحةقابلة للعد .

نظرية ٥

مجموعة الأعداد النسبية ن قابلة للعد .

البرهان :

بما أن :

$ن = ن_+ \cup « ٠ » \cup \bar{ن}$ ، حيث $ن_+$ يمثل الأعداد النسبية الموجبة ، $\bar{ن}$ يمثل الأعـــداد النسبية السالبة ،

فيكفي أن نبرهن على أن $ن_+$ مجموعـــةقابلة للعد .

نرتب الأعداد النسبية $ن_+ \cup « ٠ »$ بحسب قيمة أ + ب حيث « $٠ . \frac{أ}{ب}$ » = مجموعة

الأعداد النسبية غير السالبة ؛ ا ، ب عددان أوليان معا . فبأخذ قيم ا + ب الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ؛ وبتجنب التكرار ، نحصل على المتتالية الآتية :

$$٠ ، ١ ، \frac{١}{٢} ، \frac{٢}{١} ، \frac{١}{٣} ، \frac{٣}{١} ، \frac{١}{٤} ، \frac{٤}{١} ، \ldots\ldots$$

وهو يمثل مجموعة الأعداد $\text{ن}_+ \cup$ « . » وذلك يثبت ان هذه المجموعة قابلة للعد .

ولو رمزنا لهذه المجموعة بالصيغة التتابعية :

$$« ٠ ، \text{ن}_1 ، \text{ن}_2 ، \text{ن}_3 ، \ldots\ldots »$$

فتكون المجموعة الآتية :

$$\text{ن} = « ٠ ، \text{ن}_1 ، -\text{ن}_1 ، \text{ن}_2 ، -\text{ن}_2 ، \text{ن}_3 ، -\text{ن}_3 ، \ldots\ldots »$$

قابلة للعد ، وهو المطلوب .

نظرية ٦

مجموعة الأعداد الحقيقية ح غير قابلة للعد .

البرهــان :

سوف نكتفي باثبات ان مجموعة الأعــداد الحقيقية الواقعة بين صفر ، ١ غير قابلة للعد .

لو كانت هذه المجموعة الجزئية الحقيقية قابلة للعد لأمكن كتابتها بصيغ عشرية غير منتهية على الوجه الآتي :

$$\text{س}_1 = \text{و.}\ \text{أ}_{11}\ \text{أ}_{21}\ \text{أ}_{31} \ldots\ldots \text{أ}_{\text{ن}1} \ldots\ldots$$

$$\text{س}_2 = \text{و.}\ \text{أ}_{12}\ \text{أ}_{22}\ \text{أ}_{32} \ldots\ldots \text{أ}_{\text{ن}2} \ldots\ldots$$

— —

— —

— —

$$\text{س}_\text{ن} = \text{و.}\ \text{أ}_{1\text{ن}}\ \text{أ}_{2\text{ن}} — — — — \text{أ}_{\text{ن}\text{ن}} — — — — — —$$

— —

— —

— —

حيث أن أى هـ عضو فى المجموعة « ٠ ، ١ ، ٢ ، .... ، ٩ » وكل صيغة عشرية تحتوى على

عدد لا نهائي من الأرقام التى لا يساوى كل منها صفرا . نكتب العـــدد ١ مثلاً بالصـــيفة ٩٩٩٠٠٠٠...و٠ والعدد $\frac{١}{٢}$ بالصيفة ٤٩٩٩٠٠٠٠٠... و٠ وهكـذا .)

ولنلاحظ الآن العدد :

ب = ٠و ب$_{١}$ ب$_{٢}$ ب$_{٣}$ ......

بحيث ان ب$_{١}$ $\neq$ أ$_{١١}$ وب$_{١}$ $\neq$ صفرا ، وكذلك ب$_{٢}$ $\neq$ أ$_{٢٢}$ وب$_{٢}$ $\neq$ صفرا ... وهكذا .

نجد ان ب $\neq$ س$_{١}$ ، ب $\neq$ س$_{٢}$ ...... ، وبذلك نحصل على عدد ب ينتمي الىمجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين صفر، ١ ولكنه غير موجود فى التتابع المفـــروض . ان التناقض الناتج يثبت أن مجموعـــة الاعـــدادالحقيقية المحصـــورة بين صـــــفر ، ١ غير قابلة للعد ، وبالتالي مجموعـــة الأعـــدادالحقيقية ح غير قابلة للعد .

ومن النظرية ٦ نستنتج أن مجموعة الاعدادغير النسبية غير قابلة للعد وذلك لأن نظرية ٥ أبانت أن مجموعة الأعداد النسبية قابلة للعد . وبامكان المرء ، بدون صعوبة ، أن يثبت أن مجموعة الأعداد الجبرية قابلة للعد ، وبالتالي مجموعـةالأعـداد المتســـاميـــة (أو المتصـــاعـــدة) transcendental numbers غير قابلة للعـــد .

٤ ـ حساب الأعداد الرئيسية Arithmatic of Cardinal Numbers

لاحظنا فى البند السابق أن بعض المجموعات منتهية والبعض الآخر غير منتهية . كما لاحظنا أن بعض المجموعات غير المنتهية قابل للعد والبعض الآخر غير قابل للعد . وفى هذا المجال سنعالج العلاقات ما بين الأعداد والمجموعات . سوف نجد أنواعا مختلفة من الأعداد تشترك مع الأعـــداد الطبيعية فى كثير من الصفات ، وهي بذلك امتدادلهـــا .

يقال عن مجموعتين س، ص انهما متكافئتان اذا أمكن ايجاد تقابل بينهما ، ونعبر عن ذلـك بالرموز س □ ص . مثال ذلك : مجموعة الأعدادالحقيقية المحصورة بين ٢ ، ٥ تكافىء مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين ٠ ، ١ لأن التطبيق الآتي :

ت : أ ⟵ ٣أ + ٢

هو تقابل بين المجموعتين المذكورتين .

ومن الواضح انه :ـ

(١) س□س (صفة الانعكاسية)

(٢) اذا كانت س□ص فان ص□س (صفةالتماثلية)

(٣) اذا كانت س□ص و ص□ع فان س□ع (صفة التعدى)

ويقال ، عندئذ ، للعلاقة □ بين المجموعات انها **علاقة تكافئية**

اذا كانت س مجموعة معطاة ، فسوف نطلق على الرمز المرتبط بالمجموعة س ، وبجميع المجموعات المكافئة لها ، العدد الرئيسي (اوالرئيسي اختصاراً) للمجموعة س ، ونرمز له بالرمز # (س) وسوف نتفق على ما ياتي :

(Φ) = ٠ ، # (« ٠ ») ١ ، # (« ٠ ، ١ ») = ٢ ،

(« ٠،١،٢ ») = ٣ ، # (« ٠،١،٢،٣ ») = ٤ ، ...... الخ .

(« ٠،١،٢، ...... ، ن − ١ ») = ن

وكذلك : ـ

(ط) = د ، # (ح) = حـ .

اذا كان أ ، ب رئيسيين فمجموعهما أ+ب ،هو الرئيسي لاتحاد مجموعتين منفصلتين س ، ص بحيث ان # (س) = أ ، # (ص) = ب .

فمثلاً اذا كانت س= « ١،٢،٣ » ، ص= « − ١،٦،٩،١١ » فيكون :

(س) = ٣ ، # (ص) = ٤ . وبماان :

س U ص = « ١،٢،٣ ، − ١،٦،٩،١١ » فيكون # (س U ص) =٣+٤=٧.

اذا كان أ ، ب رئيسيين فان :

(١) أ + ب وحيد القيمة ،

(٢) أ + ب = ب + أ .

ولاثبات ذلك نقول :

اذا كان $س_1$ □ $س_2$ ، $ص_1$ □ $ص_2$ حيث ان $س_1$ ∩ $ص_1$ = $س_2$ ∩ $ص_2$ = Φ

فيكون :

($س_1$ U $ص_1$) □ ($س_2$ U $ص_2$) وبالتالي # ($س_1$ U $ص_1$) = # ($س_2$ U $ص_2$) ،

اى ان المجموع أ + ب لا يعتمد على المجموعتين الممثلتين س ، ص .

كذلك ، بما ان :

س ∪ ص = ص ∪ س حيث أن # (س) = أ ، # (ص) = ب فان أ + ب =

(س ∪ ص) = # (ص ∪ س) = ب + أ .

واذا كان أ ، ب ، ج ثلاثة رئيسيات فان :

(أ + ب) + حـ = أ + (ب + حـ) .

وكيما نثبت ذلك ، نلاحظ ان :

(أ + ب) + حـ = # (س ∪ ص) + # (ع) = # (س ∪ ص ∪ ع) ،

أ + (ب + حـ) = # (س) + # (ص ∪ ع) = # (س ∪ ص ∪ ع) .

ولكن اتحاد المجموعات تجميعي ، اى ان (س ∪ ص) ∪ ع = س ∪ (ص ∪ ع) ، لذلك فان (أ + ب) + جـ = أ + (ب + حـ) .

لقد عرفنا الحاصل الكارتيزى بين مجموعتين س ، ص بانه المجموعة المؤلفة من جميع الأزواج المرتبة (أ ، ب) للمجموعتين . وبالرموز نكتب :

س × ص = « (أ ، ب) : أ ∈ س و ب ∈ ص » .

وباستخدام هذا التعريف نتوصل الى تعريف حاصل ضرب رئيسيين أ ، ب بالصيغة :

أ . ب = # (« (أ ، ب) : أ ∈ س و ب ∈ ص ») حيث أ = # (س) ،

ب = # (ص) .

مثال ذلك :

بما ان # (« أ، ب، جـ ») = ٣ ، # (« ١، ٢، ٣، ٤ ») = ٤ فان :

٣ . ٤ = # (« أ، ب، جـ ») × (« ١، ٢، ٣، ٤ »)

= # (« (أ، ١) ، (أ، ٢) ، (أ، ٣) ، (أ، ٤) ، (ب، ١) ، (ب، ٢) ، (ب، ٣) ، (ب، ٤) ،
(جـ، ١) ، (جـ، ٢) ، (جـ، ٣) ، (جـ، ٤) »)

= ١٢ .

وكما هي الحال فى الجمع ، فبالنســــبة للضرب نلاحظ انه :

اذا كان أ ، ب رئيسيين فان :

(١) أ . ب وحيد القيمة .

(٢) أ . ب = ب . أ (حاصــــل ضـرب الرئيسيات ابدالي) .

وللبرهنة على الملاحظتين السابقتين نقول :

اذا كان $س_1 \square س_2$ ، $ص_1 \square ص_2$ فان :

($س_1 \times ص_1$) $\square$ ($س_2 \times ص_2$) وبالتالي :

($س_1 \times ص_1$) = # ($س_2 \times ص_2$) وهذا يعني ان حاصل الضرب مستقل عن المجموعتين

وكذلك فان التطبيق :

ت : (أ ، ب) ⟵ (ب ، أ) ، أ ∈ س و ب ∈ ص ،

هو تقابل وعليه فان # ((أ،ب)) = # ((ب،أ)) وبذلك فان أ . ب = ب . أ

وبالنسبة لقانون التجميع فى الضرب وقانون توزيع الضرب بالنسبة للجمع لدينا :

(١) (أ . ب) . حـ = أ . (ب . حـ) ،

(٢) أ . (ب + حـ) = أ . ب + أ . حـ ،بالنسبة لأى ثلاث رئيسيات أ ، ب ، حـ .

وكيما نبرهن على صحة ذلك نقول :

(١) ان التطبيق الآتي :

ت : ((أ،ب) ، حـ) ⟵ (أ، (ب،حـ))

بين المجموعتين ((أ،ب) ، حـ) : أ ∈ س و ب ∈ ص و حـ ∈ ع » ،

((أ، (ب،حـ) : أ ∈ س و ب ∈ ص و حـ ∈ ع »)

هو تقابل ولذلك فهما متكافئتان وينتج أن :

((أ،ب) ،حـ) = # ((أ، (ب،حـ))) أو (س.ص) . ع = س . (ص.ع)

(٢) لنفرض ان ص ∩ ع = Φ . فيكون (س×ص) ∩ (س×ع) = Φ .

نلاحظ أن :

س٠(ص+ع) = # (س) ٠ # (ص U ع)= # (س×(ص U ع))

وس٠ص+س٠ع = # (س×ص) + # (س×ع)

= # ((س×ص) U (س×ع))

وبما أن س×(ص U ع) = (س×ص) U (س×ع) فيكـــون س٠ (ص+ع) =س٠ص+ س٠ع وهو المطلوب .

ومن الخواص المهمة لرئيسيات المجموعات غير المنتهية الخاصة الآتية :

قانونا الاختزال في الجمع والضرب غير صحيحين بالنسبة لرئيسيات المجموعات غير المنتهية .

ولاثبات ذلك نلاحظ (« (٢) ، ص ٣٤٣ ») :ـ

(١) بما أن اتحاد مجموعتين احداهما قابلة للعد والأخرى منتهية هو مجموعة قابلة للعد ، فيكون :

د+١=د ، حيث # (ط) =د .

ومن ذلك ينتج أن :

د+١ = (د+١) + ١ = د + ٢ مع أن ١ ≠ ٢ ، الأمر الذى يناقض قانـون الاختزال في الجمـع .

(٢) بما أن اتحاد مجموعتين كل منهمـا قابلة للعد هو مجموعة قابلة للعد ، فيكون :

د+د=د ، أو د٠ (١+١) = د (الضرب توزيعي بالنسبة للجمع) .

ومن ذلك ينتج أن د×٢=١×د أو ٢×د = ١ ٠ د مع ان ٢ ≠ ١ ، وهذا يناقض قانون الاختزال في الضرب .

وأخيراً نود ان نبين بانه مما ذكـر آنفـا نستنتج ان :

١) د+د+د = د٠د٠د = د

٢) ن٠د=د، حيث ن عدد طبيعي .

٣) د+حـ= ، حيث حـ= # (ح)

٤) حـ+حـ=حـ .

٥) وباستعمال نظرية ٢ يكون :

أ+د=أ ،حيث أ رئيسي لمجموعة غير منتهية، وبالتالي فان :

أ+١=أ

٥ ـ انظمة المصادرات Axiomatic systems

بعد ان تناولنا لغة الرياضيات المعاصرة بالشرح ، سوف نبحث الآن أسلوب الرياضيات المعاصرة او طريقتها . واكثر الطرق استعمالا فى الوقت الحاضر هو مايسمى بطريقة المصادرات .

والمصادرة (او الفرضية او المسلمة) هي عبارة مسلم بصحتها ، أو هي عبارة مفروض انها صحيحة . ومجموعة من العبارات المسلم بصحتها تؤلف **نظاماً من المصادرات** • وتستخدم في نظام المصادرات بعض التعابير غير المعرفة ، والتي تكتسب مفهوماتها من المصادرات نفسها . ويعتمد البرهان على صحة عبارة معينة (تسمى قضية او نظرية) ، على استعمال قواعد المنطق التقليدى فيما يخص قانون حذف الوسط وقانون التناقض وطريقة خلاف الفرض والاستنتاج وغيرها (١٠ ، ص ٩) .

ولتوضيح ذلك ، نفرض ان م مجموعة من العناصر « أ ، ب ، ج ، ..... » ، فيها بعض المجموعات الجزئية تسمى اصنافا ، وهي كلها تخضع لنظام المصادرات الآتي $\sum$:

(١) اذا كان أ،ب عنصرين فى م ، فيوجد ، على الأقل ، صنف واحد يحتويهما .

(٢) اذا كان أ،ب عنصرين فى م ، فيوجد ، على الأكثر ، صنف واحد يحتويهما .

(٣) يوجد بين كل صنفين عنصر واحد مشترك على الأقل .

(٤) يوجد صنف واحد على الأقل .

(٥) يحتوى الصنف الواحد على ثلاثة عناصر من م على الأقل .

(٦) لاتنتمي جميع عناصر م الى نفس الصنف .

(٧) لايحتوى الصنف على أكثر من ثلاثة عناصر .

نلاحظ ان النظام $\sum$ يحتوى على تعبيرين غير معرفين فقط هما « العنصر » و « الصنف » وعلاقة واحدة غير معرفة هي « الانتماء الى الصنف او المجموعة » ، . ولا تحمل التعابير غير المعرفة فى نظام المصادرات ، اى معنى سوى ماهو مذكور فى النظام . ومن الممكن ان نرمز للصنف الذى يحتوى على العنصرين أ،ب بالرمز أ ب .

وكيما نشرح مفهوم « البرهان » فى الرياضيات ، سوف نسرد بعض النظريات على سبيل المثال .

نظريـة ١ .

كل عنصرين ، فى م يعينان صنفاً واحـداً يحتوى عليهما .

البرهان :

اذا كان أ ، ب عنصرين فى م ، فبمـوجبمصادرة (١) يوجد صنف واحد ، على الأكثر ، مثل $م_1$ يحتوى عليهما . ولكن بموجب المصادرة(٢) ، لابد من وجود صنف واحد ، مثل $م_1$ ، بحيث يحتوى على أ،ب . ولذلك يكون الصنف $م_1$ = أ ب هو الصنف الوحيد المعين بالعنصرين أ،ب .

نظرية ٢ .

يوجد بين كل صنفين عنصر واحد مشترك .

البرهان :

لو أمكن وجود عنصر ثان ، غير أ مثلاً ، بين صنفين $م_1 \neq م_2$ ، (مصادرة ٣) ، فلا يمكن أن يحتويهما غير صنف واحـد بموجب مصـادرة(٢) . وهذا يعني ان $م_1 = م_2$ وهو أمر مناقض للفرض القائل ان $م_1 \neq م_2$

نظرية ٣ .

توجد ثلاثة عناصر لاتقع فى الصنف الواحد.

البرهان :

ليكن $م_1$ صنفاً مفروضاً بموجب مصادرة (٤) . وبحسب مصادرة (٥) ، يحتوى $م_1$ على ثلاثة عناصر ، على الأقل ، مثل أ ، ب ، حـ . وبماأن جميع عناصر م لا تنتمي الى نفس الصنف ، حسب مصادرة (٦) ، فهناك عنصر د ، يختلفعن هذه العناصر ، ولا ينتمي الى $م_1$.

نظرية ٤ .

كل مجموعة تخضع للمصـادرات الست (١) ـ (٦) من النظام $\sum$ تحتوى على سبعة عناصر على الأقل .

البرهان :

استنادا الى نظرية ٣ ، يوجد ثلاثة عناصر فى م لا تقع فى نفس الصنـف مثـل أ،ب،حـ . وبموجب مصادرة (٥) ، يوجد عنصر ثالث فى كل صنف يتعين بزوج من الأزواج الثلاثة اب ، بحـ ، أحـ ، وليكن د،هـ،و على التوالى . انكلاً من هذه العناصر الثلاثة يختلف عن العناصر أ،ب،حـ كما تختلف فيما بينها (مصادرة ٢) . وبذلك نحصل على الأصناف الثلاثة أبد ، بحـهـ ، احـو . ان الصنفين أهـ ، بو يختلفـان فيمابينهما كما يختلفان عن جميع الاصناف الأخرى ، وبموجب مصـادرة (٣) يوجـد بينهما عنصرمشترك يختلف عن جميـع العناصر المفروضـه

والتي ذكرت الآن ، وليكن ن . بذلك نحصل على سبعة عناصر ، على الأقل ، هي أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ن .

نظرية ٥ .

كل مجموعة م تخضع للمصادرات السبع (١) ـ (٧) في النظام Σ تحتوى على سبعة عناصر فقـط .

البرهـان :

استنادا الى نظرية ٤ ، تحتوى م على سبعة عناصر أ،ب،جـ،د،هـ،و،ن على الأقل . فلو جاز وجود عنصر آخر مثل ل ، لتوصلنا الى تناقض كما سيظهر فيما ياتي باستعمال مصادرة (٧) التي لم تستخدم في نظرية (٤) . ان بين الصنفين جـ د ، أ هـ و عنصرا مشتركا (مصادرة ٣) ، وهذا العنصر يختلف عن أ وعن هـ ، وعليه ، بموجب مصادرة (٧) ، يجب ان يكون العنصر ن . وبنفس الطريقة نثبت أن العنصر المشترك بين الصنفين أ ح ل ، د هـ هو في الواقع العنصر ل . وهكـذا نحصل على سبعة عناصر كما في الجدول الآتي حيث الاعمدة ترمز للاصناف : =

أ	ب	حـ	د	هـ	و	ن
ب	حـ	د	هـ	و	ن	أ
د	هـ	و	ن	أ	ب	حـ

والآن بفرض وجود العنصر ل ، يكـون للصنفين ل أ ، ب و ن عنصر مشترك ، بمـوجب مصادرة (٣) ، يتميز عن كل من ب ، و ، ن وهو مستحيل حسب مصادرة (٧) . وهذا يعني أن مجموعة عناصر م هي سبعة فقط .

ومن المهم أن نلاحظ أن نظرية (٥) توضح وجود **هندسة محدودة** (٤ ، ص ٢٣٧) ذات سبع نقاط (أو عناصر) وسبعة خطوط (أو اصناف) وعلى كل نقطة ثلاثة خطوط ، وعلى كل خط ثلاث نقاط ، وتدعى هذه الهندسة ، أحيانا ، **بهندسة فانو أو الهندسة الاسقاطية** ذات السبع نقاط . ومن الممكن تمثيل نقاط وخطوط هذا النوع من الهندسة الاسقاطية بـرؤوس مثلث متسـاوى الاضـلاع ومنتصفات اضلاعـه ومركز دائرتـه الداخلـة وخطوطها باضـلاع المثلث وارتفاعاتـه ودائرته الداخلة (٨ ، ص ١٦٢) .

٦ ـ النماذج الرياضية Mathematical Models

بعد اختيار التعابير غير المعرفة ووضع نظام المصادرات المتضمن لهذه التعابير ، تبرز أسئلة مهمة في هذا الصدد : هل ان نظـام المصادرات الناتج خال من التناقض ؟ هل يمكن اختصـار النظام المتكون مع الحفاظ على النتائج المشتقة ؟ أيجوز أن يؤدى النظام المفروض الى تفسيـرين مختلفين اصلا ؟

يقال عن نظام من المصادرات Σ انـه **متناسق** (أو متوائم) اذا لم يكن بالامكان استنتاج عبارتين متناقضتين منه . ولكن السؤال الـذي يفرض نفسه هو : كيف يمكن اثبات تناسـق

مجموعة من مصـــادرات ؟ وللاجابـة على هـــذاالسؤال نحتاج الى بعض التعاريف . سوف نقول عن نظام $\sum$ ان له تفسيراً اذا أمكن تعيين معان للتعابير غير المعرفة فى النظام ، بحيث تصبح المصادرات عبارات صحيحة لجميع قيم المتغيرات العبارية فى النظام . فهندسة فانو مثلا هي تفسير للنظام $\sum$ نتج عن ترجمة كلمة « عنصر » بكلمة « نقطة » وكلمة « صنف » بكلمة « خط » وكلمة « ينتمي » بالتعبـيـر « يقع على » أو مـايرادف ذلك. وان نتيجة التفسـير تسمى **نموذجاً.** فالتفسير المذكور سابقا أعطى نموذجا للنظام $\sum$. وسوف نرمز للنموذج المرتبط بتفسير ت بالرمز ن (ت) . وفى هذه الحالة نقول ان النظام $\sum$ **متحقق** وذلك بسبب توفر تفسير لــه . فالنظام $\sum$ متحقق بموجب الشرح السابق.

ومن الجدير بالملاحظة انه عند عرض تفسيرمعين لنظام مصادرات مفروض $\sum$ ،تكـون المصادرات عبارات صحيحة بخصـــوص النموذج الناتج . ويفترض ، فى ذلك ، ان يكون قانـون التناقض صحيحاً لجميـــع العبارات التي تخص النموذج كما يفترض ان تكون جميع العبـــارات المستنتجة من نظام مصادرات $\sum$ صحيحة لجميع نماذج $\sum$.

وبهذا الشأن لدينا النظرية الآتية (١٠،ص٢٧)

نظرية ٦ .

ان امكانية التحقيق لنظام من المصادرات تؤدى الى تناسقه .

البرهان :

لو جاز لنظام مصادرات $\sum$ أن يؤدى،بالاستنتاج ، الى عبارتين متضاربتين فســتكون العبارتان صحيحتين فى نموذج ما،ن (ت) ،للنظام المعطى ، وهذا غير ممكن .

لذلك فوجود تفسير للنظام يعنى تناســقه وهو المطلوب .

ولقد أشرنا ، فيما سبق ، الى العلاقة بين نظام من المصادرات وامكانية الاستغناء عن بعض المصادرات فيه . وهذا يؤدى الى البحث عـن المصادرات الزائدة فى النظام تمهيـداً للاستغناء عنها ، اذ ليس من المستحب الكلام الكثير ،وقديما قيل خير الكلام ماقل ودل !

يقال للمصادرة أ فى نظام ما $\sum$ انهــا **مستقلة** اذا كان كل من النظامين $\sum$ ، $\sum$ ــ أ+أ تحقيقيين،علما ان أ يرمز الى نقيض(أو نفى) أ . ويدعى النظـام $\sum$ نظامــاً مستقلا اذا كانت كل مصادرة فيه مستقلة ،واذالم يكن مستقلا سمي **تابعا .**

ولاثبات استقلال النظام Σ المعطى فى البند السابق ، يجب عرض مجموعة من النماذج الرياضية بحيث فى كل نموذج منها لا تصح احدى المصادرات بينما تصح البقية . لذلك يجب أن يكون عدد النماذج يساوى عدد المصادرات ومقداره ٧ .

فالنموذج الآتي يثبت استقلال المصادرة (٧) : ـ

لتكن م المجموعة « ٠،١،٢،....، ١٢ »مرتبة فى صفوف بحسب الجدول الآتي ، حيث الأعمدة تمثل الأصناف فى المجموعة : ـ

٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	٠
٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	٠	١	٢
٩	١٠	١١	١٢	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨

ففي هذا النموذج نلاحظ بسهولة ان جميع المصادرات متحققة عدا المصادرة (٧) . ولو كانت الارقام ترمز الى نقاط والأعمدة (اوالأصناف) ترمز الى خطوط فان التشكيل المذكور يعبر عن **هندسة أسقاطية** ذات ثلاث عشرة نقطة وثلاثة عشر خطاً وعلى كل خط شاربع وعلى كل نقطة اربعة خطوط (٤، ص ٢٣٣) .

وكيما نثبت استقلال المصادرة (٦) ناخذ المجموعة م مؤلفة من خط واحد يمثل صنف المجموعة وعليه ثلاث نقاط تمثل عناصرها . ففي هذا النموذج تكون المصادرة (٦) خاطئة بينما تكون بقية المصادرات صحيحة .

وعند تمثيل المجموعة م بثلاثة حروف ا،ب،حـ وأصنافها بالأزواج اب ، ب جـ ، احـ نلاحظ أن جميع المصادرات تكون عبارات صادقة فى هذا النموذج عدا المصادرة (٥) حيث تكون كاذبة . وبنفس الطريقة يستطيع القارىء ، انيتثبت من استقلال بقية المصادرات الخمس عن طريق عرض نماذج تصح فيها جميع المصادرات عدا واحدة فى كل حالة .

وهناك خاصية أخرى يحسن توفرها فى نظام المصادرات هي فكرة التمامية . فاذا كانت $\triangle$ تمثل نظاماً من مصادرات مشتقاً من فكرة معينة ف ويستخدم مجموعة ع من تعابير غير معرفة ، فقد تكون $\triangle$ غير كافية كنظام لاستيفاء الفكرة ف من حيث عدم توفر العدد اللازم من المصادرات . وبعبارة اخرى ، قد لاتتضمن المصادرات المفروضة المفاهيم اللازمة لاشتقاق جميع النظريات المطلوبة .

هذا من جهة ، ومن جهة ثانية ، قد يكون النظام $\triangle$ غير كاف من حيث ان ع لاتحتوى على المقدار الضرورى من التعابير غير المعرفة . ففي الهندسة المستوية مثلاً ، قد يكون النظام المعطى لا يتضمن مفهوم الزاوية أو التعامد ، وانما يحتوى فقط على مفهوم التوازى او الاسقاط أو الترتيب أو على ثلاثتها معا .

ويقال عن نظام △ انه **تام** اذا لم يكن بالامكان اضافة عبارة أ ، من نوع عبارات △ ، الى △ دون أن يكون النظام **الجديد** △ +أ تابعا . أوبتعبير آخر : ان النظام △ تام طالما لايمكن اضافة عبارة أ ، من نوع عبارات △ ، بحيث تكون أ مستقلة فى النظام △ +أ . وقد يتساءل المرء : كيف يمكن التوصل الى اثبات توفر هذه الخاصية فى نظام معطى ؟ وللاجابة عن هذا السؤال سنستفيد من مفهوم التجانس . فيقال عن نموذجين $ن_1$ ، $ن_2$ لنظام من مصادرات △ انهما **متجانسان** ، بالنسبة للنظام △ ، اذا امكن ايجاد تقابل بين عناصر النموذج الأول وعناصر النموذج الثاني بحيث **يحفظ** المصادرات . وان هذا المفهوم « العملي » لفكرة التمامية يقود الى فكرة اخرى هي الفئوية . فيقال لنظام من مصادرات △ انه **فئوى** اذا كان كل نموذجين ، من نماذجه ، متجانسين . وبهذا المفهوم نتوصل الى النظرية الآتية التي تربط بين مفهومي التمامية والفئوية .

نظرية ٧ .

اذا كان نظام مصادرات فئويًا فيكون تاما .

البرهان :

لنفرض ان △ فئويا وسنبرهن على ان △ تام . فلو كان △ غير تام فبالامكان ايجاد عبارة أ ، من نوع عبارات △ ، بحيث ان كلاً من النظامين △ +أ ، △ +أ تحقيقي . لنفرض الآن ان $ت_1$ هو تفسير للنظام △ +أ ، $ت_2$ هو تفسير للنظام △ +أ . فبما ان △ فئوى ، بالفرض ، فبالامكان ايجاد تجانس بين النموذجين ن ($ت_1$) ، ن ($ت_2$) . لكن هذا مستحيل لأن العبارة أ صحيحة فى النموذج ن ($ت_1$) وخاطئة فى النموذج ن ($ت_2$) وهذا التناقض يثبت النظرية (١٠ ، ص ٣٦) .

ونترك للقارىء ، على سبيل التمرين ، ان يثبت بأن النظام △ المعطى فى البند السابق ، فئوى وبالتالي تام .

٧ – المنطق الرياضي Mathematical Logic

العبارة هي مجموعة من الكلمات تحمل معنى قد يكون صوابا أو خطأ . فالعبارة ٢+٤=٦ صحيحة ، بينما العبارة ٢+٧=٦ خاطئة . لكن مجموعة الكلمات –+– ٢+٥=٥ ليست عبارة اذ ليس لها معنى في الرياضيات . وكذلك مجموعة الكلمات : أيهما اكبر ٣ أو ٥ ؟ فهي ليست عبارة وهي من قبيل الجمل الاستفهامية . ومجموعة الكلمات : اجمع ٦ مع ٤ فهي ليست عبارة أيضا ، اذ هي من قبيل الجمل الأمرية .

وتنفى العبارة بوضع احدى اشارات النفي أمامها . ونفى العبارة أ (أو نقيضها) يرمز له بالرمز أَ ويعنى أن أ صحيحة اذا كانت أَ خاطئة و أ خاطئة اذا كانت أَ صحيحة . واذا أعطيت عبارتان فيمكن ربطهما في عبارة جديدة مركبة بالعطف أو التبادل أو الاشتراط . وتعتمد صحة أو خطأ العبارة المركبة على صحة أو خطأ العبارتين المركبتين وعلى اداة الربط ، ولا تعتمد على محتوى العبارتين لها .

فعند **عطف** العبارتين أ ، ب للحصول على العبارة المركبة أ و ب ، وبالرموز أ ∧ ب ، تكون العبارة الناتجة صحيحة فى حالة واحدة فقط وهي عندما أ تكون صحيحة وب تكون صحيحة ، وفيما عدا ذلك تكون خاطئة ، فالعبارة ٤ فردى و ٥ زوجي خاطئة بينما ٤ زوجي و ٥ فردى صحيحة . وعلى كل ، فهذا اتفاق أو تعريف .

وفي **التبادل** نحصل من العبارتين أ ، ب على العبارة أ او ب ، بالرموز أ ٧ ب ، وتكون العبارة الناتجة خاطئة اذا كانت كلتا مركبتيها خاطئة وفيما عدا ذلك صحيحة .

واما فى **الاشتراط** فتكون العبارة المركبة (اذا أ . . . . . فتكون ب) خاطئة فى حالة واحدة فقط وهي عندما تكون أ صحيحة و ب خاطئة وفيما عدا ذلك تكون صحيحة . وبالرموز نكتب أ ⟵ ب وتقرأ : اذا أ فَ ب .

وكثيرا ما نواجه فى الرياضيات عبارات صحيحة وكذلك معكوساتها . مثال ذلك اذا تساوت اضلاع مثلث فتكون زواياه متساوية ، واذا تساوت زوايا مثلث فتكون اضلاعه متساوية . ونعبر عن ذلك ، بصورة مختصرة ، بقولنا : تتساوى اضلاع المثلث اذا ، وفقط اذا ، تساوت زواياه . وبالرموز نكتب (أ ⟵ ب) ∧ (ب ⟵ أ) أو بصيغة ثانية هي أ ⟷ ب . وتكون هذه العبارة المركبة صحيحة اذا كان كل من الاشتراطين صحيحا ، وفيما عدا ذلك تكون خاطئة .

وكيما نبني نظرية منطقية بصورة شكلية أو رياضية ، لا بد من افتراض كلمات أو رموز غير معرفة تكتسب معانيها من نظام معين من المصادرات . ولأجل ذلك نرمز للعبارات المنطقية بالرموز أ ، ب ، جـ ، . . . . ونأخذ الرمزين ٧ ، ـــ للدلالة على المفهومين غير المعرفين هما التبادل (أو الاختيار) والنفي (أو النقيض) . وسوف نقصد بالعبارة المركبة أ ⟵ ب العبارة أ ٧ ب . وسوف نفترض أن **مجموعة العبارات المنطقية** ، مع الرموز ٧ ، ـــ ، ⟵ تخضع للنظام الآتي من **المصادرات** (الذى وضعه وايتهيد ورسل فى كتابهما اسس الرياضيات) (٧ ، ص ٤٣) :

(١) (أ ٧ أ) ⟵ أ

(٢) أ ⟵ (ب ٧ أ)

(٣) (أ ٧ ب) ⟵ (ب ٧ أ)

(٤) (أ ⟵ ب) ⟵ (جـ ٧ أ) ⟵ (جـ ٧ ب)

واضافة الى ما ورد ، سوف نفرض صحة القاعدتين الآتيتين فى الاشتقاق المنطقي :

(١) من الممكن التعبير عن اية عبارة أ بعبارة اخرى ، بسيطة أو مركبة ، فى اى تعبير منطقي . وهذه تسمى بقاعدة التعويض . Rule of Substitution

(٢) من العبارتين :

أ ← ب ، أ

نستنتج العبارة ب . وبتعبير آخر : كلما هو مشترط بعبارة صحيحة يكون صحيحا .
وهذه تسمى **قاعدة الاستنتاج** **Modus ponens**

ومما سبق ذكره ، يمكن بناء نظرية منطقيةتتبين خطوطها مما ياتى من النظريات .

نظريــة ١

اذا كانت أ نظرية (صحيحة) فتكون أ ٧ أنظرية (صحيحة) ايضا .

البرهان : يستنتج من استخدام مصادرة(٢) وقاعدتي الاشتقاق .

نظريــة ٢

اذا كانت أ نظرية و ب أية عبارة (بسيطةأو مركبة) فتكون أ ٧ ب نظرية .

البرهــان :

أ ←ب ٧ أ مصادرة (٢)

أ صحيحة بالغرض

ب ٧ أ قاعدة الاستنتاج

(ب ٧ أ) ← (أ ٧ ب) مصادرة (٣)

أ ٧ ب قاعدة الاستنتاج

وهو المطلوب

نظريــة ٣

اذا فرضت العبارة أ ٧ ب فتصح العبارةب ٧ أ .

البرهان : واضح من استعمال مصادرة(٣) وقاعدة الاستنتاج .

نظريــة ٤

اذا فرضت العبارة أ ← ب وكانـتحـ اية عبارة فان العبارة (حـ ٧ أ) ←
(جـ ٧ ب) صحيحة .

البرهان : مباشر من استخدام مصادرة (٤) وقاعدة الاستنتاج .

نظـرية ٥

(أ ←ب) ← (جـ ← أ) ←(جـ ← ب)

البرهان :

(أ ←— ب) ←— « جـ ٧ أ) ←—(جـ ٧ ب » مصادرة ٤

(أ ←— ب) ←—« جـَ ٧ أ) ←—(جـَ ٧ ب » قاعدة التعويض

ولكن جـَ ٧ أ هي تعريف للصيغة جـ ←— أ ،فيكون :

(أ ←— ب) ←— « جـ ←— أ) ←—(جـ ←— ب » وهو المطلوب .

نظريـــة ٦

اذا فرضت العبارتان أ ←— ب ، ب ←—جـ فتنتج العبارة أ ←—جـ (خاصية التعدى)

البرهان :

(س ←— ص) ←— « ع ←— س) ←— (ع ←— ص »	نظرية ٥
(ب ←— جـ) ←— « أ ←— ب) ←— (أ ←— جـ »	قاعدة التعويض
ولكن ب ←— جـ	بالفرض
فيكون :	
(أ ←— ب) ←— (أ ←— جـ)	قاعدة الاستنتاج
ولكن أ ←— ب	بالفرض
فيكون : أ ←— جـ	قاعدة الاستنتاج

وهو المطلوب

نظريـــة ٧

أ ـ ٧ أ

البرهان :

أ ←— (أ ٧ ب)	مصادرة ٢
أ ←— (أ ٧ أ)	قاعدة التعويض
أ ٧ أ ←— أ	مصادرة ١
أ ←— أ	قاعدة الاستنتاج
أ ـ ٧ أ	بالتعريف

تم المطلــوب

نظريــة ٨

ا ٧ اَ

البرهان : مباشـر باستعمال النظريتـين ٣ ، ٧ .

نظريــة ٩

ا ←— اَ‌َ

البرهان :

اَ ٧ اَ‌َ	نظرية ٨
ا ٧ اَ‌َ	قاعدة التعويض
ا ←— اَ‌َ	بالتعريف

نظريــة ١٠

اَ‌َ ←— ا

البرهان :

استعمل نظرية ٩ وقاعدة التعويض ونظرية٤ ونظرية ٨ وقاعدة الاستنتاج واخيرا نظرية ٣ .

نظــرية ١١

(ا ←— ب) ←— (بَ ←— اَ)

البرهــان :

ب ←— بَ‌َ	نظرية ٩
(اَ ٧ ب) ←— (اَ ٧ بَ‌َ)	نظرية ٤
(اَ ٧ ب) ←— (بَ‌َ ٧ اَ)	مصادرة ٣
(اَ ٧ ب) ←— (بَ‌َ ٧ اَ)	نظرية ٦
(ا ←— ب) ←— (بَ ←— اَ)	بالتعريف

وهو المطلوب

وبامكان المرء ان يستمر في اثبات نظرياتعديدة اخرى على نفس الشاكلة . ولكـن قـد يتساءل المرء فيما اذا وجـد احتمال حصـول تناقض بين النظـريات المستنتجة . او بعبـارة اخرى : هل يُحتمل استنتاج عبارتين من النوع س ، سَ ؟ لا شك ان وقوع هذا الامر يجعـل حساب العبارات برمته عديم الفائدة لأن ذلـك يعني امكانية البرهنـة على صحـة اى تركيب

عبارى . وفيما يأتي سنبرهن استحالة حدوث ذلك . وبمعنى آخر ، سوف نبرهن على أن حساب العبارات (أو المنطق ذا القيمتين) متناسق وذلك من ملاحظة النموذج الآتي (٧ ، ص ٢٠٩) : —

لنترجم الرموز العبارية ا ، ب ، ج ، ... الى متغيرات حسابية تأخذ القيمتين صفرا أو واحدا ، ونفسر العبارة ا ٧ ب كحاصل ضرب حسابي لقيمتى العبارتين المذكورتين كما نعتبر قيمة العبارة اَ تساوى صفرا اذا كانت قيمة ا تساوى واحدا والعكس بالعكس . وهكذا فان كل تركيب عبارى يقابل صيغة حسابية تأخذ احدى القيمتين . أو ١ . واذا كانت قيمة هذه العبارة تساوى صفرا ، بصورة تطابقية ، فنقول ان قيمة التعبير الرمزى تساوى صفرا بصورة تطابقية . وبحسب هذا التفسير ، نقول ان أية صيغة مشتقة من المصادرات المفروضة تأخذ القيمة صفرا بصورة تطابقية لجميع قيم المتغيرات التى تحتويها هذه الصيغة . وبذلك نحصل على نموذج فيه نستطيع تفسير جميع المصادرات ، أو فيه تصبح المصادرات علاقات حسابية صحيحة وفق ما يأتى :

(١) بما ان الصيغة اَ ٧ ا ذات قيمة تساوى صفرا فان (ا ٧ ا) ⟵ او (ا ٧ ا) ٧ ا تكون قيمتها صفرا لأن ا ٧ ا تأخذ دائما قيمة ا .

(٢) أما المصادرة (٢) فيمكن كتابتها بالشكل اَ ٧ (ا ٧ ب) وهي تأخذ قيمة الصيغة (اَ ٧ ا) ٧ب لأن الحاصل الحسابي تجميعي . وبذلك تكون قيمتها تساوى صفراً .

(٣) ان العبارة (ا ٧ ب) تأخذ قيمة (ب ٧ ا) وبالتالي فان (ا ٧ بَ) ٧ (ب ٧ ا) حالة خاصة من الصيغة سَ ٧ س التى قيمتها تساوى صفراً دائما . وعليه فالمصادرة (٣) تأخذ القيمة صفرا فى هذا النموذج .

(٤) واخيرا فبالنسبة للمصادرة (٤) ، اذا كانت ج = . ، فأحد العوامل يساوى صفراً ، واذا كانت ج = ١ فقيمة ج ٧ ا هى نفس قيمة ا ، وقيمة (ج ٧ ب) هى نفس قيمة ب وبذلك تصبح قيمة صيغة المصادرة (٤) نفس قيمة الصيغة (اَ ٧ بَ) ٧ اَ ب ٧ وهى أيضاً حالة خاصة من الصيغة اَ ٧ ا . وهكذا نستنتج ان جميع المصادرات تأخذ القيمة صفراً لجميع قيم المتغيرات الداخلة فى هذه الصيغ .

ومن الجدير بالملاحظة ان الخاصية المذكورة آنفا تبقى صامدة خلال تطبيق قاعدتى التعويض والاستنتاج . فبالنسبة للقاعدة الأولى ، نلاحظ ان مدى القيم المعطاة للمتغيرات لا يمكن توسيعه بتعويض تعبير معين عن أى منها . وكذلك ، فبالنسبة للقاعدة الثانية ، عندما نستنتج الصيغة ص من الصيغتين س و سَ ٧ ص نلاحظ ان خاصية امتلاك القيمة صفرا تنتقل من هاتين الصيغتين الى الصيغة المستنتجة . ولتوضيح ذلك نبين : بما أن الصيغة س تأخذ القيمة صفراً ، فان قيمة سَ تكون واحدا وبذلك تكون قيمة العبارة المركبة سَ ٧ ص هى نفس قيمة ص . وهكذا فان ص ، وكذلك سَ ٧ ص ، تأخذ القيمة صفرا دائما . ويتبين من ذلك تناسق حساب العبارات ، اذ لو جاز استنتاج نتيجتين من نوع س ، سَ ، فعند التعويض عن س لانحصل ، في كلتا الحالتين ، على القيمة صفر . وبالأصح ان نتجت القيمة صفراً فى الحالة الاولى ، فستنتج القيمة ١ فى الثانية . وبذلك يتم اثبات عدم امكانية الحصول على تركيبتين متناقضتين باستخدام المصادرات وقاعدتى الاشتقاق .

ويبقى السؤال الآتي جديراً بالاهتمام : هل ان النظام الذى بنى عليه المنطــــق مستقل ؟ وللاجابة عليه نستعرض المصادرات واحدة بعد أخرى ونأتى بنماذج تثبت استقلال كل منها : ــ

(١) لنفرض أن المتغيرات العبارية تأخذ القيم ٠ ، ١ ، ٢ (معيار ٤) وان ٧ ترمز لعملية الضرب الاعتيادى . وكذلك نفرض أن أَ = ٠ عندما أ = ١ والعكس بالعكس ، وان أَ = ٢ عندما أ = ٢ . وعند التحليل نلاحظ ان كلاً من التعابير أَ ٧ أ والمصادرات (٢) ، (٣) ، (٤) تنتج دائماً القيمة صفرا وان هذه القيمة تنتقل ، بتطبيق قاعدتى الاشتقاق ، الى جميع النظريات المستنتجة منها . ولكن التعويض عن أ = ٢ فى المصادرة (١) يحصل (٢ × ٣َ) × ٢ == ٠َ × ٢ = ١ × ٢ = ٢ ≠ صفرا وهذا يثبت استقلال المصادرة (١) .

(٢) لنفترض ان المتغيرات أ ، ب ، جـ ، . . . . تأخذ القيم ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ بحسب جدول الضرب الآتى :

٠ × ٠ = ٠ × ١ = ٠ × ٢ = ٠ × ٣ = ٠ ، ١ × ١ = ١ × ٢ = ١ × ٣ = ١ ،
٣ × ٢ = ٢ ، ٢ × ٢ = ٢ ، ٣ × ٣ = ٣ وان قانون الابدال صحيح ايضا .
كذلك نفرض ان : ١َ = ٠ ، ٠َ = ١ ، ٢َ = ٣ ، ٣َ = ٢ .

ومن السهولة بمكان التأكد من كون المصادرات (١) ، (٣) ، (٤) ، وحتى الصيغة أَ ٧ أ تأخذ كل منها القيمة ٠ أو ٢ ، بينما نجد أن المصادرة (٢) تأخذ القيمة ١ عندما تكون أ = ٢ ، ب = ١ ، الأمر الذى يثبت استقلال المصادرة (٢) .

ولاثبات استقلال المصادرة (٣) نأتى بالنموذج الآتى :

١َ = ٠ ، ٠َ = ١ ، ٢َ ٠ ، ٣َ = ٢ ، وكذلك :

٠ × ٠ = ٠ × ١ = ٠ × ٢ = ٠ × ٣ = ١ × ٠ = ٢ × ٠ = ٣ × ٠ = ٠ ،
١ × ١ = ١ ، ١ × ٢ = ٢ × ١ = ٢ ، ١ × ٣ = ٣ × ١ = ٣
٢ × ٣ = ٠ ، ٣ × ٢ = ٣ ، ٢ × ٢ = ٢ ، ٣ × ٣ = ٣ .

نلاحظ ان المصادرات (١) ، (٢) ، (٤) تأخذ القيمة صفراً ، بينما تأخذ المصادرة (٣) القيمة ٣ عندما أ = ٢ ، ب = ٣ .

واخيرا لاثبات استقلال المصادرة (٤) نفرض أن المتغيرات المنطقية تأخذ القيم ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ وان :

١َ = ٠ ، ٠َ = ١ ، ٢ = ٣ ، ٣َ = ٠ ، وكذلك :

٠ × ٠ = ٠ × ١ = ١ × ٠ = ٢ × ٠ = ٠ × ٢ = ٠ × ٣ = ٣ × ٠ = ٢ × ٣ =
٣ × ٢ = ٠ ،

١ × ١ = ١ ، ١ × ٢ = ٢ × ١ = ٢ ، ١ × ٣ = ٣ × ١ = ٣ ، ٢ × ٢ = ٢ ، ٣ × ٣
= ٣ .

فنجد أن المصادرات (١) ، (٢) ، (٣) تنتج القيمة صفرا ، بينما تنتج المصادرة (٤) القيمة ٢ عندما نضع أ = ٣ ، ب = ١ ، جـ = ٢ ، وبذلك يكمل البرهان .

وكيما نتعرف على بعض التوسعات التى طرات على المنطق الرمزى ، نود أن نختتم هـذه الدراسة بتعميم المنطق ذى القيمتين على الوجه الآتى :

ان مجموعة حلول المعادلة س . س = س هي « ٠ ، ١ » . وبأخذ هاتين القيمتين كقيم ممكنة للعبارات الواردة فى المنطق الأرسطى ،حصلنا على ما يسمى بالمنطق ذى القيمتين . ورأينا القيمة صفراً تعبر عن كون العبارة التى ترمز لهاخاطئة ، بينما تعبر القيمة ١ عن كون العبارة التى ترمز لها صحيحة . وهذه أمور لا تعدو كونهااتفاقيات . لذلك قد يتساءل المرء عما اذا كان ممكنا ان تأخذ العبارة ثلاث قيم بدلاً من قيمتين، وعما اذا كان بالامكان تأليف عبارات منطقية مركبة من عبارتين أو أكثر بالاستعانة بالروابط المنطقية . فى الواقع ، لا يوجد ما يمنع ، من الناحية العقلية، ان تكون العبارة صحيحة أو خاطئة او ليست صحيحة ولا خاطئة . والعبارة « المشكوكة » ، من هذا النوع ، يمكن ان يرمز لها بالقيمة ½ كمارمزنا للعبارةالصحيحة بالرمز ١ وللعبارةالخاطئة بالرمز صفر .

وعند ربط عبارتين أ ، ب للحصول على عبارة مركبة توجد تسع امكانيات يمكن للعبارة المركبة ان تأخذ أياً منها قيمة لها . واذا كانت العبارة المركبة مؤلفة من ثلاثة متغيرات ، فهناك ٢٧ قيمة للعبارة المركبة .

واذا كانت أ ، ب . . . . عبارات معطاة فيكون (٧ ، ص ٥٦) : —

(١) أَ = ١ — أ ،

(٢) أ ∧ ب = صغ (أ ، ب) حيث صغ يرمز لصغرى القيمتين ،

(٣) أ ∨ ب = كب (أ ، ب) حيث كب يرمز لكبرى القيمتين ،

(٤) أ ⟵ ب = ١ اذا كان أ أقل او يساوي ب

١ — أ + ب اذا كان أ اكبر من ب

ان التعاريف آنفة الذكر ، المعطاة للنفى والعطف والتبادل والاشتراط ، تصح لمنطق فيه تأخذ العبارة ن اكبر أو يساوي ٣ من القيم (٧ ، ص ٣٩٧) : —

٠ ، $\frac{١}{ن - ١}$ ، $\frac{٢}{ن - ١}$ ، $\frac{٣}{ن - ١}$ ، .... ، $\frac{ن - ٢}{ن - ١}$ ، ١

وبذلك نحصل على منطق ذى ن من القيم وهو توسيع للمنطق المألوف ذى القيمتين . وفى هذا المنطق تصح جميع مصادرات المنطق ذى القيمتين كما تصح فيه جميع العبارات دائمة الصحة او ما تسمى **تحصيل حاصل** **tautologies**

★ ★ ★

المراجع

1. M· W. Al-Dhahir, concerning the parallel postulate,
Bull. Coll. Sci., Vol. 3 (1958).
2. G. Birkhoff and S. Mac Lane, A Survey of Modern Algebra)
Mac Millan (1958).
3. N. Bourbaki, Theory of Sets, Elements of Mathematics, Vol. 3 ; Addison-Wesley, Reading Mass. (1968).
4. H.S.M. Coxeter, Introduction to Geometry ; John Wiley and Sons (1961)
5. M. Eisenberg, Axiomatic Theory of Sets and Classes ; Holt, Rinehart and Winston (1971).
6. T. L. Heath, The Thirteen Books of Euclid, Vo. 1 ; Cambridge Press (1908).
7. T. Kneebone, Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics ; Van Bostrand (1965).
8. J. A. Murtha and E. R. Willard, Linear Algebra and Geometry ; Holt, Rinehart, and Winston (1969).
9. S. Mac Lane and G, Birkhoff, Algebra ; Mac Millan (1968).
10. R. L. Wilder, Introduction to the Foundations of Mathematics, John Wiley (1967).
11. H. E. Wolfe, Introduction to Non-Euclidean Geometry ; The Dryden Press, (1945).

★ ★ ★